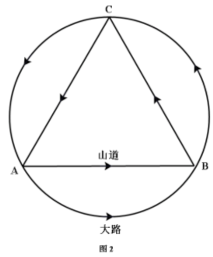
创新考题-巧用图论求解排列组合

由于 2013 年数学考试真题出现图论相关排列组合，原题如下：

15.确定两人从 A 地出发经过 B,C 沿逆时针方向行走一圈回到 A 地的方案（如图 2）.若 A 地出发时，每人均可选大路或山道，经过 B,C 时，至多有一人可以更改道路，则不同的方案有

A.16 种　　B.24 种　　C.36 种　　D.48 种　　E.64 种



【考点】排列组合

【难度】难

【解析】分步思考，从 A 到 B，每人有两种，所以两人有 4 种；从 B 到 C，如果至多有一人变道，两人有 3 种；从 C 到 A，两人有 3 种；从而总共 4×3×3=36 种。选 C。

因此要对图论相关的排列组合引起重视，特给大家总结常用的典型例题，掌握图论的命题套路和思维定势。

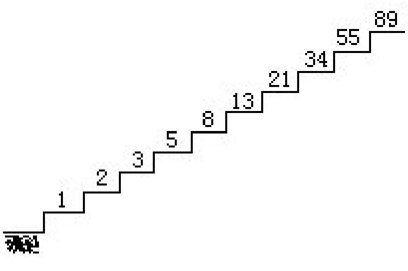
例 1 小明要登上 10 级台阶，他每一步只能登 1 级或 2 级台阶，他登上 10 级台阶共有多少种不同的登法？

(A)46　　(B)58　　(C)69　　(D)75　　(E)89

【分析与解】登上第 1 级台阶只有 1 种登法。登上第 2 级台阶可由第 1 级台阶上去，或者从平地跨 2 级上去，故有 2 种登法。登上第 3 级台阶可从第 1 级台阶跨 2 级上去，或者从第 2 级台阶上去，所以登上第 3 级台阶的方法数是登上第 1 级台阶的方法数与登上第 2 级台阶的方法数之和，共有 1+2＝3（种）……一般地，登上第 n 级台阶，或者从第（n—1）级台阶跨一级上去，或者从第（n—2）级台阶跨两级上去。根据加法原理，如果登上第（n—1）级和第（n—2）级分别有 a 种和 b 种方法，则登上第 n 级有（a＋b）种方法。因此只要知道登上第 1 级和第 2 级台阶各有几种方法，就可以依次推算出登上以后各级的方法数。由登上第 1 级有 1 种方法，登上第 2 级有 2 种方法，可得出下面一串数：

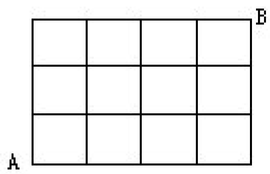
1，2，3，5，8，13，21，34，55，89。

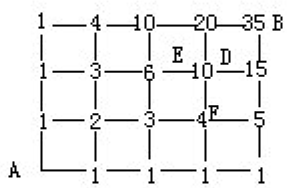
其中从第三个数起，每个数都是它前面两个数之和。登上第 10 级台阶的方法数对应这串数的第 10 个，即 89。也可以在图上直接写出计算得出的登上各级台阶的方法数（见下图）。故选 E.



例 2 在左下图中，从 A 点沿实线走最短路径到 B 点，共有多少条不同路线？

(A)22 (B)26 (C)35 (D)38 (E)42

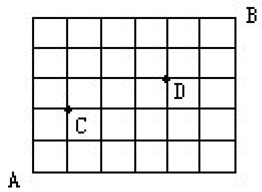


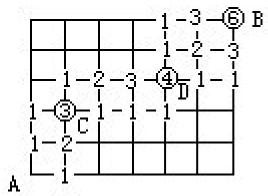


【分析与解】题目要求从左下向右上走，所以走到任一点，例如右上图中的 D 点，不是经过左边的 E 点，就是经过下边的 F 点。如果到 E 点有 a 种走法（此处 a＝6），到 F 点有 b 种走法（此处 b＝4），根据加法原理，到 D 点就有（a＋b）种走法（此处为 6＋4=10）。我们可以从左下角 A 点开始，按加法原理，依次向上、向右填上到各点的走法数（见右上图），最后得到共有 35 条不同路线。故选 C.

例 3 左下图是某街区的道路图。从 A 点沿最短路线到 B 点，其中经过 C 点和 D 点的不同路线共有多少条？

(A)68 (B)72 (C)78 (D)84 (E)96

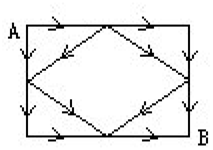


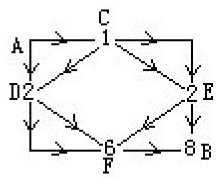


【分析与解】本题可以同例 2 一样从 A 标到 B，也可以将从 A 到 B 分为三段，先是从 A 到 C，再从 C 到 D，最后从 D 到 B。如右上图所示，从 A 到 C 有 3 种走法，从 C 到 D 有 4 种走法，从 D 到 B 有 6 种走法。因为从 A 到 B 是分几步走的，所以应该用乘法原理，不同的路线共有 3×4×6＝72（条）。故选 B.

例 4 沿左下图中箭头所指的方向从 A 到 B 共有多少种不同的走法？

(A)5 (B)6 (C)7 (D)8 (E)9





【分析与解】如右上图所示，先标出到 C 点的走法数，再标出到 D 点和 E 点的走法数，然后标出到 F 点的走法数，最后标出到 B 点的走法数。共有 8 种不同的走法。故选 D.

例 5 有 15 根火柴，如果规定每次取 2 根或 3 根，那么取完这堆火柴共有多少种不同取法？

(A)28 (B)32 (C)36 (D)42 (E)48

【分析与解】为了便于理解，可以将本题转变为“上 15 级台阶，每次上 2 级或 3 级，共有多少种上法？”所以本题的解题方法与例 1 类似（见下表）。

已取火柴根数	1	2	3	4	5	6	7	8
取 法 数	0	1	1	1	2	2	3	4

已取火柴根数	9	10	11	12	13	14	15
取 法 数	5	7	9	12	16	21	28

注意，因为每次取 2 或 3 根，所以取 1 根的方法数是 0，取 2 根和取 3 根的方法数都是 1。取 4 根的方法数是取 1 根与取 2 根的方法数之和，即 0＋1＝1。依此类推，取 n 根火柴的方法数是取（n-3）根与取（n-2）根的方法数之和。所以，这串数（取法数）中，从第 4 个数起，每个数都是它前面第 3 个数与前面第 2 个数之和。取完 15 根火柴共有 28 种不同取法。故选 A.